Corrigé

1. D'une part $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. D'autre part, d'après le théorème de limite à l'infini d'un polynôme, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 + 1) = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x (x^3 - 2x^2 + 1) = +\infty$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\mathrm{e}^x+1}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$. On a, d'une part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$, d'après un théorème de croissance comparée, et, d'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x+1}{x^2} = +\infty$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2x - 5 = \mathrm{e}^x \left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} - 2\frac{x}{\mathrm{e}^x} - \frac{5}{\mathrm{e}^x}\right)$. Or, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$. Enfin, comme, pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{2x} \geqslant \mathrm{e}^x$, car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} = 0$. Et au final, par somme puis produit, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2x - 5 = +\infty$.